**ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(Option T.A.)**

***

CONCOURS D'ADMISSION 1986

**

MATHÉMATIQUES

2ème ÉPREUVE

OPTION T.A.

(Durée 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES II – T.A.

Les fonctions considérées sont toutes à valeurs réelles. Pour tout entier k, $k \geqslant 0$, $f^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ième}}$ de la fonction f ; $f^{(0)}$ désigne la fonction f elle-même ; selon l'usage courant, f' et f'' désignent aussi les dérivées première et seconde.

PARTIE I

Soit n un entier strictement positif ; soit f une fonction, définie sur l'intervalle $I = [0, 1]$, de classe C^{n+1} sur I (c'est-à-dire n + 1 fois continûment dérivable sur I) ; on pose :

pour k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n + 1$, $M_k(f) = \sup_{x \in I} |f^{(k)}(x)|$.

Soit P un polynôme réel de degré égal à n. Etant donnés deux réels x et h (h > 0) tels que l'intervalle [x, x + h] soit contenu dans I, soit F la fonction définie sur I par la relation :

$$(1) \qquad \forall \ t \in I, \qquad F(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k h^k P^{(n-k)}(t) f^{(k)}(x + ht).$$

1° - a) Expliciter F(1) et F(0). Montrer que la fonction F est de classe C^1 sur I ; exprimer F'(t) en fonction de n, h, x, t, P et f.

b) En exprimant de deux manières différentes la différence F(1) - F(0), démontrer la relation :

$$(2) \qquad f(x + h) - f(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{h^k}{P^{(n)}(0)} \left(P^{(n-k)}(1) f^{(k)}(x + h) - P^{(n-k)}(0) f^{(k)}(x) \right)$$

$$+ \frac{(-1)^n h^{n+1}}{P^{(n)}(0)} R_n(h)$$

avec : $R_n(h) = \int_0^1 P(t) f^{(n+1)}(x + ht) \, dt.$

c) Montrer que cette relation (2) permet de retrouver une relation bien connue en choisissant comme polynôme P :

$$\forall \ t \in \mathbb{R}, \qquad P(t) = (t - 1)^n.$$

Donner, dans ce cas, un majorant de $|R_n(h)|$ à l'aide de l'un des $M_k(f)$.

d) Démontrer que, pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à n, il vient :

$$(3) \qquad \forall \quad (a, t) \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad Q(t + a) = Q(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k!} Q^{(k)}(a).$$

2° - Application : dans cette question, n = 2p. Le polynôme P est défini par la relation :

$$\forall \quad t \in \mathbb{R} \quad , \quad P(t) = t^p (1 - t)^p.$$

a) A l'aide de la relation (3), déterminer les réels $P^{(k)}(0)$, $P^{(k)}(1)$, $k = 0, 1, \ldots, 2p$.

b) Calculer, grâce à une relation de récurrence, l'intégrale :

$$I_p = \int_0^1 t^p (1 - t)^p \, dt.$$

c) En déduire une majoration de $|R_{2p}|$ en fonction de $M_{2p+1}(f)$.

Ecrire explicitement dans ce cas la relation (2) pour n = 2 et n = 4.

Quelle remarque y a-t-il lieu de formuler ?

PARTIE II

L'objet de cette partie est l'étude de polynômes particuliers. Soit toujours n un entier strictement positif.

1° - Montrer que si P est un polynôme de degré n tel que :

$\forall \quad k, k = 0, 1, \ldots, n \quad , \quad P^{(k)}(0) = P^{(k)}(1)$, il vient : $\forall \quad t \in \mathbb{R} \quad , \quad P(t + 1) = P(t)$.
En déduire que le polynôme P est constant.

2° - Montrer que, si P est un polynôme de degré n tel que :

$$\forall \quad k, \quad k = 0, 1, \ldots, n - 2 \quad , \quad P^{(k)}(0) = P^{(k)}(1),$$

il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que :

$$(4) \qquad \forall \quad t \in \mathbb{R} \ , \quad P(t + 1) - P(t) = C \, t^{n-1}.$$

Déterminer la constante C en fonction de $P^{(n-1)}(0)$ et de $P^{(n-1)}(1)$.

3° - Soit E l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à n ; préciser la dimension de E. Soit u l'application de E dans lui-même définie par la relation :

$$P \longmapsto u(P) \text{ où } \forall \quad x \in \mathbb{R} \ , \quad u(P)(x) = P(x + 1) - P(x).$$

Déterminer la matrice associée à cette application linéaire dans la base canonique $1, X, X^2, \ldots, X^n$. Quel est le rang de cette application ?

En déduire la dimension du noyau ; le préciser. Quel est l'espace image ?

Appliquer ces résultats pour démontrer que, pour tout réel C, il existe un polynôme P et un seul qui vérifie la relation (4) et la condition

$$(5) \qquad P(0) = 0.$$

4° - L'entier n est supposé supérieur ou égal à 2 ; calculer la valeur prise par le polynôme P, vérifiant les relations (4) et (5), pour t = q, où q est un entier positif ou nul. En déduire l'expression de P(t) ($t \in \mathbb{R}$) lorsque l'entier n vaut 2 puis 3. Donner le résultat sous forme d'un produit de facteurs.

5° - Soit x un réel donné ; soit g_x la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$g_x(t) = \begin{cases} \dfrac{t \, e^{xt}}{e^t - 1} & \text{si } t \neq 0 \ ; \\ 1 & \text{si } t = 0 \ . \end{cases}$$

a) Montrer que la fonction h définie par :

$$h(t) = \begin{cases} (e^t - 1)/t & \text{si } t \neq 0 \ ; \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

est développable en série entière dans un intervalle]- R, R[; préciser le rayon de convergence.

b) En déduire que la fonction g_x est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$) et qu'elle admet un développement limité à tout ordre p au voisinage de 0. On pose par suite :

$$g_x(t) = \sum_{k=0}^{p} a_k(x) \, t^k + \varepsilon_p(x, t) \, t^p \ ; \quad \lim_{t \to 0} \varepsilon_p(x, t) = 0.$$

En remarquant qu'une relation simple lie $g_{x+1}(t)$, $g_x(t)$, t et e^{xt}, en déduire :

$$\forall \quad k, k = 1, 2, \ldots \quad , \quad a_k(x + 1) - a_k(x) = \frac{x^{k-1}}{(k - 1)!} \ .$$

Démontrer que la fonction a_k est un polynôme. Préciser le degré.

Etablir la relation :

$$\forall \quad k, k = 1, 2, \ldots \quad , \quad \sum_{q=0}^{k-1} \frac{1}{(k - q)!} \, a_q(x) = \frac{x^{k-1}}{(k - 1)!} \ .$$

-§-

page 80 1986 Concours commun Mines-Ponts-Telecom.
Math 2.option 1A